

1 Introduction aux opérateurs compacts

Définition 1.1. Soient X, Y deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $T \in L(X, Y)$ (linéaire borné de X dans Y) est dit *compact* s'il envoie les parties bornées de X sur les parties relativement compactes de Y , i.e., pour toute suite bornée x_n de X , il existe une sous-suite Tx_{n_k} qui converge. On note $K(X, Y)$ l'espace des opérateurs compacts de X dans Y et $K(X) := K(X, X)$.

Exemple 1.2. Soit $T \in L(X, Y)$. Si T est de rang fini, on a $\dim TX < \infty$, alors $T \in K(X, Y)$. Egalement, si $\dim X < \infty$, alors $T \in K(X, Y)$.

Par souci de simplicité, on se restreint au cas où $X = Y = H$ est un espace de Hilbert.

Lemme 1.3. Soit $T \in L(H)$. T est compact si et seulement si $Tx_n \rightarrow 0$ pour toute suite $x_n \rightarrow 0$.

Démonstration. “ $\implies$ ” : Soit $T \in K(H)$, $\varepsilon > 0$ et $x_n \rightarrow 0$. On montre que $\|Tx_n\| < \varepsilon$ à part d'un nombre fini de points. Supposons que non. Alors il existe une sous-suite x_{n_k} telle que $\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon$. Comme x_n est bornée (car faiblement convergente) et T est compacte, on peut extraire une sous-suite $Tx_{n_{k_\ell}}$ qui converge vers, disons, y . On a $\|y\| \geq \varepsilon$. Or,

$$\|y\|^2 = \left\langle y, \lim_{\ell} Tx_{n_{k_\ell}} \right\rangle = \lim_{\ell} \left\langle y, Tx_{n_{k_\ell}} \right\rangle = \lim_{\ell} \left\langle T^*y, x_{n_{k_\ell}} \right\rangle = 0$$

et on arrive à une contradiction.

“ $\impliedby$ ” : Soit x_n bornée. Alors par Banach-Alaoglu, il existe x_{n_k} une sous-suite qui converge faiblement $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Par la propriété de T , $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$. $\square$

Remarque. Pour “ $\implies$ ” des espaces normés suffisent, pour “ $\impliedby$ ” X doit être un Banach réflexif.

Proposition 1.4.

- a) Si $T \in K(H)$ et $S \in L(H)$ alors $ST, TS \in K(H)$.
- b) Pour $T \in L(H)$, T est compact si et seulement si T^*T est compact.
- c) Pour $T \in L(H)$, T est compact si et seulement si T^* est compact.
- d) Soient $T_k \in K(H)$ et $T \in L(H)$. Si $\|T_k - T\| \rightarrow 0$, alors T est compact.

Démonstration.

- a) Soit x_n bornée. Alors Sx_n est bornée et TSx_n admet une sous-suite convergente ce qui montre que TS est compact. Soit maintenant $x_n \rightarrow 0$. Alors $Tx_n \rightarrow 0$ et donc $STx_n \rightarrow 0$ ce qui montre que ST est compact.
- b) Si T est compact, T^*T est compact par a). Si T^*T est compact, soit $x_n \rightarrow 0$. On sait que $\|x_n\| \leq M$. On en déduit que

$$\|Tx_n\|^2 = |\langle Tx_n, Tx_n \rangle| = |\langle T^*Tx_n, x_n \rangle| \leq \|T^*Tx_n\|M \rightarrow 0$$

car $T^*Tx_n \rightarrow 0$.

- c) Il suffit de montrer une implication comme $(T^*)^* = T$. Soit T compact. On observe que TT^* est compact par a). Or, $TT^* = (T^*)^*T^*$. D'après b), T^* est compact.
- d) Soit $x_n \rightharpoonup 0$. On sait que $\|x_n\| \leq M$. On en déduit que

$$\|Tx_n\| \leq \|T - T_k\| \|x_n\| + \|T_k x_n\| \leq M \|T - T_k\| + \|T_k x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M \|T - T_k\|$$

ce qui tend vers zéro quand $k \rightarrow \infty$. $\square$

Corollaire 1.5. $K(H)$ est un idéal et une sous- C^* -algèbre de $L(H)$.

2 Le théorème de Riesz-Schauder

Theorem 2.1. Soit $T \in K(H)$ et $S = I - T$.

- a) $\ker S$ est de dimension finie.
b) $\operatorname{im} S$ est fermée.
c) $H/\operatorname{im} S$ est de dimension finie.

Démonstration.

- a) Soit $x_n \in \ker S$ bornée. Comme T est compact, il existe Tx_{n_k} qui converge dans H . Or $0 = Sx_{n_k} = x_{n_k} - Tx_{n_k}$. Donc x_{n_k} converge dans H . Comme $\ker S$ est fermé, x_{n_k} converge même dans $\ker S$. Alors $\ker S$ est de dimension finie.
- b) On considère l'opérateur $\tilde{S}$ induit :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{S} & \operatorname{im} S \\ \downarrow & \nearrow \tilde{S} & \\ H/\ker S & & \end{array}$$

$\tilde{S}$ est bijectif et continu. On va montrer que $\tilde{S}^{-1}$ est continu. Supposons que non. Alors il existe $x_n \in H$ avec

$$\|[x_n]\|_{H/\ker S} = 1 \quad \text{et} \quad Sx_n \rightarrow 0.$$

On peut supposer que $\|x_n\| \leq 2$. Il existe une sous-suite Tx_{n_k} convergente. Alors $x_{n_k} = Tx_{n_k} + Sx_{n_k}$ converge, disons vers x . On a $Sx = 0$ et donc $\|[x]\|_{H/\ker S} = 0$. D'autre part on a

$$\|[x]\|_{H/\ker S} = \lim_k \|[x_{n_k}]\|_{H/\ker S} = 1$$

ce qui est une contradiction. Alors $\tilde{S}$ est un isomorphisme. Comme $H/\ker S$ est complet, $\operatorname{im} S$ est complet et donc fermé.

- c) $\operatorname{im} S =: U$ est un sous-espace fermé de H . Nous affirmons que le dual $(H/U)'$ est isomorphe à l'orthogonal $U^\perp$. On définit

$$(H/U)' \longrightarrow U^\perp, \ell \longmapsto \ell \circ \pi$$

avec π la projection de $H/\text{im } S$. La composition est dans $H' = H$ et on peut, grâce à Fréchet-Riesz, écrire $\ell \circ \pi = \langle z, \cdot \rangle$ pour un certain $z \in H$. Comme $\ell \circ \pi$ s'annule sur U , on a $z \in U^\perp$. Donc l'application est bien définie. L'injectivité est clair. Pour la surjectivité, soit $z \in U^\perp$. On pose $\ell_z(x + U) = \langle z, x \rangle$. On a $\langle z, \cdot \rangle = \ell_z \circ \pi$.

On a

$$(H/\text{im } S)' \cong (\text{im } S)^\perp = \{y \mid \forall x : \langle x, S^*y \rangle = 0\} = \{y \mid S^*y = 0\} = \ker S^*.$$

Comme $S^* = I - T^*$ avec, d'après Proposition 1.4, T^* compact et on peut appliquer a). On en déduit

$$\dim H/\text{im } S = \dim(H/\text{im } S)' = \dim \ker S < \infty$$

ce qui finit la preuve. □

Remarque. Le résultat reste vrai dans les espaces de Banach.

Remarque. Un opérateur qui vérifie les propriétés de Théorème 2.1 s'appelle *opérateur de Fredholm* et le nombre

$$\text{ind } S = \dim \ker S - \dim H/\text{im } S$$

s'appelle *indice*. Le théorème dit alors que tout opérateur sous la forme $S = I - T$ avec T compact est un opérateur de Fredholm. On peut même montrer que son indice est zéro. Ceci implique que S est injectif si et seulement si S est surjectif. On va montrer cela à la main.

On va utiliser le lemme suivant sans preuve.

Lemme 2.2 (Lemme de Riesz). *Soit X un espace vectoriel normé et U un sous-espace fermé avec $U \neq X$. Alors pour tout $0 < \delta < 1$ il existe $\|x\| = 1$ tel que*

$$\|x - u\| \geq 1 - \delta$$

pour tout $u \in U$.

Lemme 2.3. *Soit $T \in K(H)$ et $S = I - T$. Si S est injectif si et seulement si S est surjectif.*

Démonstration. Supposons d'abord que S n'était pas surjectif. Alors $H_1 := \text{im } S$ est un sous-espace vectoriel propre de H . D'après Théorème 2.1, H_1 est fermé. Comme $TS = ST$, on a $TH_1 \subset H_1$. On définit $T_1 = T|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_1$. On montre que $I - T_1$ n'est pas surjectif.

Supposons que si et soit $x \in H \setminus H_1$. Alors $(I - T)x \in H_1$. Si $I - T_1$ est surjectif, il existe $\tilde{x} \in H_1$ avec $(I - T_1)\tilde{x} = (I - T)x$. Mais comme T_1 n'est que la restriction de T et $I - T$ est injectif, on en déduit que $x = \tilde{x}$. On arrive à une contradiction. Alors $H_2 := \text{im}(I - T_1) \subsetneq H_1$.

Par récurrence, on obtient une famille strictement décroissante

$$H_n := \text{im}(I - T|_{H_{n-1}})$$

de sous-espaces fermés de H avec $TH_n \subset H_n$. Par le lemme de Riesz (Lemma 2.2 avec $\delta = \frac{1}{2}$), il existe $x_n \in H_n \setminus H_{n+1}$ avec $\|x_n\| = 1$ et

$$\inf_{y \in H_{n+1}} \|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}.$$

Comme T est compact, on peut extraire une sous-suite Tx_{n_k} convergente. Or, pour $\ell > k$, on a

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_\ell}\| = \|x_{n_k} - \underbrace{(I - T)x_{n_k} - \overbrace{Tx_{n_\ell}}^{\in H_{n_\ell} \subset H_{n_{k+1}}}}_{\in H_{n_{k+1}}}\| \geq \frac{1}{2},$$

une contradiction.

Soit maintenant S est surjectif. Alors S^* est injectif et $S = I - T^*$ avec $T^* \in K(H)$ par Proposition 1.4. Avec l'implication qu'on vient de montrer, on a que S^* est surjectif et donc S est injectif. $\square$

Remarque. Le résultat reste vrai dans les espaces de Banach.

On peut maintenant démontrer quelques propriétés spectrales fondamentales des opérateurs compacts normaux.

Proposition 2.4. *Soit $T \in K(H)$.*

- a) *Si H est de dimension infinie, alors $0 \in \sigma(T)$.*
- b) *Tout $z \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ est une valeur propre de T avec $\ker(T - z)$ de dimension finie.*
- c) *$\sigma(T) \setminus \{0\}$ est dénombrable.*
- d) *Le seul point d'accumulation de $\sigma(T)$ est zéro.*

Démonstration.

- a) Si $0 \in \rho(T)$, alors T admet un inverse continu. Par Proposition 1.4, $I = TT^{-1}$ est compacte. Il s'en suit que toute suite bornée de H admet une sous-suite convergente. Donc H est de dimension finie.
- b) On écrit $T - z = -z(I - \frac{1}{z}T)$. Par Riesz-Schauder, $\ker(T - z)$ est de dimension finie. Par définition, $T - z$ est non-injectif ou non-surjectif. Par Lemme 2.3, dans les deux cas, $T - z$ est non-injectif. Donc z est une valeur propre de T .
- c) et d) Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{z \in \sigma(T) \mid |z| \geq \varepsilon\}$ est fini. Supposons que non. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $z_n \in \sigma(T)$ avec $|z_n| \geq \varepsilon$. D'après b), les z_n sont des valeurs propres de T . On note x_n une suite de vecteurs propres associés. L'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est libre. On pose $E_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Alors E_n est une famille strictement croissante de sous-espaces fermés de H qui sont invariants par T . Avec le Lemme de Riesz (Lemme 2.2 avec $\delta = \frac{1}{2}$), on construit une suite $y_n \in E_n$ telle que $\|y_n\| = 1$ et

$$\inf_{x \in E_{n-1}} \|x - y_n\| \geq \frac{1}{2}.$$

On va montrer que Ty_n n'est pas de Cauchy. On observe que

$$z_n y_n - Ty_n = z_n \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (z_n - z_i) \alpha_i x_i \in E_{n-1}.$$

Pour $n > m$ on a donc

$$\begin{aligned} \|Ty_n - Ty_m\| &= \left\| z_n y_n - z_n \frac{1}{z_n} (Ty_m + z_n y_n - Ty_n) \right\| \\ &= |z_n| \left\| y_n - \frac{1}{z_n} \underbrace{\left(\overbrace{Ty_m}^{\in E_m \subset E_{n-1}} + \overbrace{z_n y_n - Ty_n}^{E_{n-1}} \right)}_{\in E_{n-1}} \right\| \geq |z_n| \frac{1}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que T est compact et Ty_n admet une sous-suite convergente. $\square$

3 Le théorème spectral des opérateurs compacts

Theorem 3.1. Soit $T \in K(H)$ normal. Alors il existe un système orthonormal $E = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (potentiellement fini) et une suite $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (potentiellement finie) qui tend vers zéro tels que

$$H = \ker T \oplus \overline{\text{span } E}$$

et

$$Tx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \langle e_k, x \rangle e_k, \quad x \in H$$

où λ sont les valeurs propres non-nuls de T et e_k les vecteurs propres associés. De plus, $\|T\| = \max |\lambda_k|$.

Remarque. Afin de compléter E en une base orthonormale de Schauder, on doit y ajouter une base de Schauder du noyau. Ce dernier peut être de dimension infinie (même non-séparable). Dans une telle base, on obtient une “diagonalisation” de T .

Démonstration. Soient $z_1, z_2, \dots$ les valeurs propres non-nuls distincts de T . Par Proposition 2.4 c), cet ensemble est dénombrable. On note $d_k = \dim \ker(T - z_k)$ (la multiplicité géométrique de z_k). On définit la suite λ_k via

$$(\lambda_k) = (\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{d_1 \text{ fois}}, \underbrace{z_2, \dots, z_2}_{d_2 \text{ fois}}, \underbrace{z_3, \dots, z_3}_{d_3 \text{ fois}}, \dots).$$

Avec Proposition 2.4 d), on a donc $\lambda_k \rightarrow 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on choisit une base orthonormale $\{e_1^k, \dots, e_{d_k}^k\}$ de $\ker(T - z_k)$. Ensuite, on définit e_k via

$$(e_k) = (e_1^1, \dots, e_{d_1}^1, e_1^2, \dots, e_{d_2}^2, e_1^3, \dots, e_{d_3}^3, \dots).$$

D'après Proposition 2.4 b), l'ensemble $E = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un système orthonormal et

$$Te_k = \lambda_k e_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Comme T est normal, on a $\ker T = \ker T^*$ et donc si $x \in \ker T$

$$\langle x, e_k \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \langle x, T e_k \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \langle T^* x, e_k \rangle = 0.$$

Donc $\ker T \perp E$ et $H_1 := \ker T \oplus \overline{\text{span } E}$ est un sous-espace fermé de H . On va montrer que H_1 est aussi dense dans H . Il suffit donc de montrer que $H_1^\perp = \{0\}$. Pour tout $y \in H$ avec $y \perp e_k$ on a

$$\langle T y, e_k \rangle = \langle y, T^* e_k \rangle = \bar{\lambda}_k \langle y, e_k \rangle = 0.$$

En particulier, $T H_1^\perp \perp E$ comme $H_1^\perp \perp E$. On a donc $T H_1^\perp \subset H_1^\perp$. On considère maintenant la restriction $S := T|_{H_1^\perp} \in K(H_1^\perp)$. Supposons que $S \neq 0$. Comme S est normal, on a

$$\|S\| = r(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} = \max_{z \in \sigma(S)} |z|.$$

Donc, il existe $z \in \sigma(S) \setminus \{0\}$. Avec Proposition 2.4 b), il existe $x \in H_1^\perp$ avec $Sx = zx \neq 0$. S étant une restriction de T , on a z est une valeur propre de T et donc $x \in \text{span } E \subset H_1$. Une contradiction car $x \neq 0$ et $x \in H_1^\perp$. Donc $S = 0$ et $H_2 = \{0\}$. Alors

$$H = \ker T \oplus \overline{\text{span } E}.$$

La projection de $x \in H$ sur $\overline{\text{span } E}$ s'écrit

$$Px = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k, x \rangle e_k.$$

On a $\ker P = (\text{im } P)^\perp = (\overline{\text{span } E})^\perp = \ker T$. Pour tout $x \in H$, il existe donc un unique $y \in \ker T$ tel que

$$x = y + \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k, x \rangle e_k.$$

Comme T est continu, on a

$$Tx = Ty + \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k, x \rangle T e_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \langle e_k, x \rangle e_k.$$

Enfin, comme T est normal $\|T\| = \max_{z \in \sigma(T)} |z| = \max_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|$. □

Remarque. Si on note P_k la projection orthogonale sur $\ker(T - z_k)$, on a

$$P_k x = \sum_{i=1}^{d_k} \langle e_i^k, x \rangle e_i^k.$$

Théorème 3.1 affirme que

$$Tx = \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k P_k x$$

où la série converge fortement (c'est-à-dire simplement). On peut même montrer qu'elle converge en norme. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2. Soient $z_k \in \mathbb{C}$ et $0 \neq P_k \in L(H)$ des projections orthogonales avec $\text{im } P_i \perp \text{im } P_j$ pour $i \neq j$. On a

$$\left\| \sum_{k=1}^n z_k P_k \right\| = \max_{1 \leq k \leq n} |z_k|.$$

Démonstration. On va montrer deux inégalités. On remarque d'abord que

$$H = \left(\bigoplus \text{im } P_k \right)^\perp \oplus \left(\bigoplus \text{im } P_k \right).$$

On peut donc écrire $x \in H$ comme $x = y + \sum_k P_k x$ ce qui donne

$$\left\| \sum_k z_k P_k x \right\|^2 = \sum_k |z_k|^2 \|P_k x\|^2 \leq \max_k |z_k|^2 \left\| \sum_k P_k x \right\|^2 \leq \max_k |z_k|^2 \|x\|^2$$

où on a utilisé Pythagore. Réciproquement, en choisissant $|z_\ell| = \max_k |z_k|$ et $x \in \text{im } P_\ell$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\left\| \sum_k z_k P_k \right\| \geq \left\| \sum_k z_k P_k x \right\| = \|z_\ell x\| = |z_\ell| = \max_k |z_k|$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Corollaire 3.3. Soit $T \in K(H)$ normal, $\{z_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ et P_k la projection orthogonale sur $\ker(T - z_k)$. Alors

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k P_k$$

où la somme converge en norme opérateur.

Démonstration. On note $S_n := \sum_{k=1}^n z_k P_k$. Les projections orthogonales P_k sont normales (même auto-adjointes). Donc S_n est normal et avec Lemme 3.2 pour $n > m$, on a

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{m < k \leq n} z_k P_k \right\| = \max_{m < k \leq n} |z_k|.$$

Alors S_n est une suite de Cauchy dans $L(H)$ et admet donc une limite. Comme S_n converge fortement vers T cette limite est T . $\square$

4 Théorème min-max de Courant-Fischer

Dans cette section, on considère les opérateurs compacts positifs. Ce sont des opérateurs $T \in K(H)$ qui satisfont $\langle x, Tx \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$. On admet que leur spectre $\sigma(T) \subset [0, \infty)$ est positif. Avec Proposition 2.4, on peut ordonner les valeurs propres de T :

$$z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \cdots > 0.$$

Theorem 4.1 (min-max). *Soit $T \in K(H)$ positif. Alors*

$$z_k = \max_{\dim U=k} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle = \min_{\dim U=k-1} \max_{\substack{x \in U^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle$$

pour tout $k \geq 1$.

Démonstration. On fait la preuve en trois étapes.

Étape 1 : On montre d'abord qu'il suffit de considérer les sous-espaces de $(\ker T)^\perp$ de dimension k . On a $H = \ker T \oplus (\ker T)^\perp$. Soit $P : H \rightarrow (\ker T)^\perp$ la projection orthogonale sur $(\ker T)^\perp$. On a $\operatorname{im}(I - P) = (\operatorname{im} P)^\perp = \ker T$ et donc comme T est auto-adjoint

$$\langle x, Tx \rangle = \langle Px, Tx \rangle = \langle Px, T Px \rangle$$

pour tout $x \in H$. Soit maintenant $U \subset H$ avec $\dim U = k$. On a $\dim PU \leq k$. Si $\dim PU < k$, alors il existe $x_0 \in U \cap \ker T = \ker P|_U \neq \{0\}$ avec $\|x_0\| = 1$ ce qui implique que

$$0 \leq \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle \leq \langle x_0, Tx_0 \rangle = 0.$$

On obtient donc que

$$\min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle = \min_{\substack{x \in PU \\ \|x\|=1}} \langle Px, T Px \rangle \leq \min_{\substack{x \in PU \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle \leq \sup_{\substack{V \subset (\ker T)^\perp \\ \dim V=k}} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle$$

où on a utilisé l'observation que si $\dim PU < k$ alors le min est déjà zéro. En prenant le suprémum sur tous les espaces de dimension k , on a

$$\sup_{\dim U=k} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle \leq \sup_{\substack{V \subset (\ker T)^\perp \\ \dim V=k}} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle.$$

L'autre inégalité est triviale.

Étape 2 : On montre que pour tout sous-espace U de $(\ker T)^\perp$ de dimension k vérifie

$$\min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} \langle x, Tx \rangle \leq z_k.$$

D'après Théorème 3.1 $(\ker T)^\perp$ est séparable et il existe $E = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormale de $(\ker T)^\perp$ telle que

$$Te_n = z_n e_n.$$

On définit $N := \overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n \geq k\}} \subset (\ker T)^\perp$. On observe que N est de codimension $k - 1$ dans $(\ker T)^\perp$. On a

$$k - \dim U \cap N = \dim U / (U \cap N) = \dim(U + N) / N \leq \dim(\ker T)^\perp / N = k - 1.$$

On en déduit que $U \cap N$ est non-trivial. Donc il existe $x \in U$, $\|x\| = 1$ qui s'écrit

$$x = \sum_{n \geq k} \langle e_n, x \rangle e_n.$$

Maintenant, on a

$$\langle x, Tx \rangle = \sum_{n \geq k} z_n |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq z_k \sum_{n \geq k} |\langle e_n, x \rangle|^2 = z_k$$

ce qui montre l'inégalité énoncée en prenant le minimum.

Étape 3 : Pour le sous-espace $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$, le minimum est atteint en e_k et on a égalité :

$$\langle x, Tx \rangle = \sum_{n=1}^k z_n |\langle e_n, x \rangle|^2 \geq z_k \sum_{n=1}^k |\langle e_n, x \rangle|^2 = z_k \|x\|^2$$

pour tout $x \in \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ avec égalité pour e_k . □